

Métodos Estadísticos en Ingeniería

Tema 6 : Estimación paramétrica.

Tema 7 : Contraste de hipótesis paramétricas.

1. La duración de una determinada componente electrónica sigue una distribución normal. Los resultados de una muestra aleatoria de esta clase de componentes son: 1200, 1350, 1275, 890, 1125, 1520, 1100 horas.

- Estima la duración media y la varianza.
- Halla los correspondientes intervalos de confianza al 90 %.
- ¿Puede admitirse que la duración media de la componente electrónica es de 1200 horas y que la desviación típica es 150?

2. La probabilidad de que cierto tipo de dispositivo sea defectuoso es p . A partir de una muestra de 100 lotes de 15 dispositivos se obtuvieron los siguientes resultados:

Nº de dispositivos defectuosos:	0	1	2	3
Nº de lotes:	84	15	1	0

- Estima el valor de p y halla un intervalo al 95 % de confianza.
- ¿Puede admitirse que el porcentaje de dispositivos defectuosos es del 1 %?

3. El número de fallos de un sistema es una variable aleatoria que sigue aproximadamente una distribución de Poisson de parámetro λ . Se observó dicho sistema 100 veces con los resultados siguientes:

Nº de fallos:	0	1	2	3	4	5
Frecuencia:	84	9	3	2	1	1

- Estima el parámetro λ y halla un intervalo de confianza al 95 %.
- Contrasta si el número medio de fallos del sistema es superior a 0.2.

4. Supongamos que los tiempos de vida de las tarjetas gráficas T_1 y T_2 son variables aleatorias exponenciales con parámetros λ_1 y λ_2 , respectivamente.

- Si ponemos a prueba 25 tarjetas T_1 y la suma de sus tiempos de vida es $\sum_{i=1}^{25} x_i = 25242$ días, estima la duración media de la tarjeta T_1 y el parámetro λ_1 , y halla los correspondientes intervalos de confianza al 95 %.
- Posteriormente, se analizan 20 tarjetas T_2 y se obtiene que la suma de sus tiempos de vida es $\sum_{j=1}^{20} y_j = 18235$ días. Estima la duración media de la tarjeta T_2 y el parámetro λ_2 y halla los correspondientes intervalos de confianza al 95 %.
- Calcula un intervalo con una confianza del 95 % para el cociente de parámetros λ_1/λ_2 .
- Contrasta si la duración media de la tarjeta gráfica T_1 es superior a 1000 días.
- ¿Qué tarjeta gráfica es mejor?

5. La media y la cuasidesviación típica del precio de una determinada clase de aparato en 50 establecimientos de venta elegidos al azar entre los 8273 de un determinado país es de 320 y 30 euros, respectivamente.

- Construye intervalos al 90 % de confianza para la media y la varianza del precio del aparato en dicho país.
- ¿Puede aceptarse que el precio medio de los aparatos en los 8273 establecimientos es mayor que 300 euros con un 5 % de significación? Halla el p -valor del test.

6. Durante los últimos 5 años, el número de ordenadores que vende por semana cierta empresa informática es aproximadamente normal $N(\mu, \sigma)$. En una muestra aleatoria simple de 10 semanas de los últimos 5 años, dicha empresa vendió 175, 168, 171, 169, 183, 165, 188, 177, 167 y 180 ordenadores.
- Halla intervalos de confianza al 90 % para la varianza y la media del número de ordenadores vendidos por semana.
 - Si se sabe que $\sigma = 8$ ordenadores, calcula un intervalo de confianza para μ al 90 %.
 - Si se sabe que $\mu = 175$ ordenadores, halla un intervalo de confianza para σ al 90 %.
 - ¿Puede aceptarse que el número medio de ordenadores que se vendieron por semana en los últimos 5 años es de 170 con un nivel de confianza del 95 %, y que la desviación típica es de 8 ordenadores?
7. En un estudio para comparar la calidad de dos tipos de impresoras (A_1 y A_2) se obtuvieron los siguientes resultados muestrales:

$$\begin{array}{l} \text{Impresora } A_1: \quad n_1 = 13 \quad \bar{x} = 4 \quad s_1 = 3 \\ \text{Impresora } A_2: \quad n_2 = 11 \quad \bar{y} = 5 \quad s_2 = 1,2 \end{array}$$

Supuesto que el grado de calidad es aproximadamente normal $N(\mu_i, \sigma_i)$ para la impresora A_i , $i = 1, 2$, se pide:

- Un intervalo de confianza para el cociente de varianzas con $\alpha = 0,10$.
 - Un intervalo de confianza 0.95 para la diferencia de las calidades medias.
 - ¿Cuántas impresoras habría que analizar para estimar μ_1 con un error máximo de $\pm 0,25$ con una confianza del 95 %?
 - Contrasta si puede considerarse que la diferencia media de calidades entre la impresora A_2 y la A_1 es de una unidad como indican los datos muestrales. Razona la respuesta.
8. Se quiere comparar la rapidez de dos programas informáticos, A y B , para la resolución de cierta clase de problemas de ingeniería mecánica. Para ello se analizan 9 casos utilizando tanto el programa A como el B . Los tiempos necesarios para resolver estos casos fueron:

Caso:	1 ^o	2 ^o	3 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o	7 ^o	8 ^o	9 ^o
Programa A :	11.5	13.2	15.7	9.8	12.6	10.5	11.3	12.6	14.1
Programa B :	12.3	12.9	13.1	10.9	11.2	12.1	9.9	11.8	12.3

- Halla un intervalo con un 95 % de confianza para la diferencia de los tiempos medios de resolución ¿Qué hipótesis son necesarias?
 - ¿Qué programa informático es preferible? Acota el p -valor.
9. De una muestra de 200 personas de una población de 75269 habitantes, 40 tienen la intención de comprar un vehículo el próximo año.
- Construye un intervalo de confianza de nivel $1 - \alpha = 0,95$ para la proporción de habitantes (y para el número de habitantes) de dicha ciudad que piensan comprar un vehículo el año próximo.
 - ¿Es lógico aceptar que el próximo año se venderán más de 12000 vehículos en la población?

10. Un centro de cálculo computacional desea evaluar la eficacia de su sistema de memoria en disco. Para ello utiliza como medida de calidad el tiempo medio entre fallos del sistema. Dado que el centro de cálculo trabaja con dos unidades de disco, desea comparar los tiempos medios entre fallos de ambas unidades. Se tomaron dos muestras aleatorias independientes de $n_1 = 10$ y $n_2 = 15$ fallos, y los resultados obtenidos fueron:

$$\begin{array}{ll} \text{Unidad de disco 1: } & \bar{x} = 92 \text{ horas} \quad s_1 = 16 \text{ horas} \\ \text{Unidad de disco 2: } & \bar{y} = 108 \text{ horas} \quad s_2 = 12 \text{ horas} \end{array}$$

Supuesta la normalidad de los datos:

- a) Halla un intervalo de confianza para la diferencia de los tiempos medios entre fallos de las dos unidades de disco.
 - b) Según los datos del problema parece que la *Unidad de disco 2* es la mejor. ¿Es posible afirmar esto estadísticamente? Razona la respuesta.
11. Un supervisor de producción de una empresa de componentes para motores de maquinaria pesada sospecha que existe diferencia entre las proporciones, p_1 y p_2 , de componentes defectuosos producidos por dos máquinas distintas. De dos muestras aleatorias de tamaños $n_1 = 80$ y $n_2 = 90$ se obtuvieron 7 y 12 aparatos defectuosos, respectivamente. Halla un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones $p_1 - p_2$. ¿Puede afirmarse con estos datos que la segunda máquina de la empresa es claramente inferior a la primera?
12. El tiempo de vida de cierta clase de dispositivo es aproximadamente normal con media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 40$ días. Halla el mínimo tamaño muestral para estimar la duración media de los dispositivos con un error (absoluto) menor que 15 días al 90% de confianza.
13. Calcula el mínimo tamaño muestral necesario para cometer un error absoluto menor que 0.04 con una confianza de (al menos) 0.90 en la estimación de la proporción de neumáticos de cierta compañía que tienen determinado defecto, sabiendo que en una muestra de 60 neumáticos se han obtenido 12 con defectos.
14. Dada una distribución de Poisson de parámetro λ , se establece la hipótesis nula $H_0 : \lambda = 0,1$ y la alternativa $H_1 : \lambda = 0,4$. En muestras de tamaño 100, halla: (a) La región crítica óptima con nivel de significación $\alpha = 0,10$; (b) La potencia del contraste.
15. Dada una variable aleatoria $X \sim Exp(\lambda)$, se desea contrastar $H_0 : \lambda = 1$ frente a $H_1 : \lambda = 5$ con un nivel de significación $\alpha = 0,10$ utilizando una muestra aleatoria de tamaño uno. Se pide: (a) La región crítica de máxima potencia; (b) La potencia del contraste; (c) ¿Qué hipótesis se aceptaría si el valor muestral es 2.5?
16. En una población $N(0, \sigma)$ se proponen dos hipótesis sobre la varianza. Una hipótesis nula: que su valor es 16; y una hipótesis alternativa: que es igual a 4. Se pide: (a) la mejor región crítica basada en muestras de tamaño n ; (a) Para $n = 10$ y $\alpha = 0,10$, halla la región crítica óptima y la potencia del contraste; (c) Con la muestra siguiente: 0.05, 1.58, 1.41, -0.01, -0.40, -1.39, -1.78, 1.03, 1.27 y 0.23, ¿qué hipótesis se aceptaría? ¿Cuál es el p -valor del contraste?
17. Un empresario debe comprar una partida de monitores. Un fabricante le ofrece una marca cuya duración asegura que se distribuye según una $N(2000, 100)$; sin embargo, el empresario cree que la distribución real es $N(1800, 100)$. Si considera la primera distribución como hipótesis alternativa y la segunda como hipótesis nula, halla el tamaño muestral mínimo para que al efectuar el contraste de hipótesis, la probabilidad de rechazar la hipótesis alternativa cuando es cierta sea como máximo 0.05, y que la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta sea 0.1.

18. La función de densidad de una variable aleatoria X es:

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} x^3 \exp(-x/\theta)/(6\theta^4) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Se pide: (a) Contrastar $H_0 : \theta = 2$ frente a $H_1 : \theta = 4$ con un nivel de significación $\alpha = 0,0044$ basándose en una muestra de tamaño 500; (b) La potencia del contraste.

19. La edición de manuales de hidrología se considera satisfactoria si el número medio de erratas por página no supera el 0.1 (H_0). Una vez realizadas las pruebas de imprenta, se eligen 10 páginas al azar, y se rechazan las pruebas si se observan 2 o más erratas. Se supone que el número de erratas por página sigue una distribución de Poisson. ¿Qué nivel de significación tiene el contraste? ¿Con qué probabilidad aceptaremos un manual si realmente tiene una media de 0.2 erratas por página?

20. Se desea comparar la proporción de hogares con calefacción en Asturias y en Galicia. Para ello se realiza un muestreo en las dos comunidades con los siguientes resultados:

Asturias: de 500 hogares elegidos al azar, 150 disponían de calefacción.
Galicia: de 1000 hogares elegidos al azar, 350 disponían de calefacción.

¿Hay suficiente evidencia estadística para concluir, con un nivel de significación del 5 %, que es menor la proporción de hogares con calefacción en Asturias que en Galicia? Halla el p -valor del contraste.

21. La duración media de una muestra de 10 unidades Zip es de 1250 días y la cuasidesviación típica muestral de 115 días. Una nueva versión del dispositivo se presenta al mercado, y se observa que en una muestra de 12 Zips la duración media es de 1340 días, con una desviación típica muestral de 106 días. (a) ¿Puede admitirse que las varianzas en las dos versiones son iguales?, ¿bajo qué hipótesis? (b) ¿Ha aumentado la duración media de los Zips? Acota el p -valor del contraste.

22. Un fabricante de asientos para aviones produce un determinado modelo en dos colores: A y B. De los 100 primeros aviones vendidos, 60 fueron del color A. ¿Proporcionan estos datos suficiente evidencia estadística para concluir que las líneas aéreas prefieren mayoritariamente el color A?

23. Un examen de ingeniería consta de 100 preguntas con 4 alternativas cada una. Sólo una de las alternativas es correcta, y las preguntas abarcan uniformemente toda la asignatura. El profesor de la asignatura desea que los alumnos que superen la prueba sepan al menos el 50 % de la asignatura. ¿Cuál debe ser el número mínimo de respuestas correctas para aprobar el examen, con un nivel de confianza del 99 %? Estudia las dos formas posibles de plantear el contraste.

24. Una compañía de neumáticos hizo un estudio sobre de los neumáticos en la motocicletas. La prueba realizada ha sido medir la profundidad mínima de los dibujos del neumático después de 20000 km de uso. La medición se hizo a 8 motocicletas tomando datos de la rueda delantera y trasera en milímetros.

motocicleta	1	2	3	4	5	6	7	8
rueda delantera	3.6	2.4	1.9	3.2	2.5	2.4	2.7	2.5
rueda trasera	3.5	2.3	2.6	3.2	2.9	2.9	3.2	2.4

a) Halla un intervalo de confianza al 90 % de la diferencia de medias. ¿Qué hipótesis son necesarias?

b) Puede aceptarse que el desgaste medio es igual en las ruedas traseras que en las ruedas delanteras ($\alpha = 0,05$). ¿Cuál es el p -valor?

25. Los siguientes datos representan los tiempos de duración de las películas que producen dos compañías cinematográficas.

Compañía	Tiempo (minutos)						
I	103	94	110	87	98		
II	97	82	123	92	175	88	118

- a) Estima la duración media y la desviación típica para ambas compañías.
- b) Halla un intervalo de confianza para el cociente de varianzas con nivel de significación $\alpha = 0,1$, ¿qué hipótesis son necesarias?, ¿puede admitirse que son iguales?
- c) ¿Puede afirmarse que la duración media de las películas en la compañía II es mayor que en la compañía I?, ¿cuál es el p -valor?
26. La duración (en meses) de una muestra de 8 aparatos de tipo A es 10, 16, 12, 20, 11, 19, 13 y 14 meses, mientras que, en una muestra de 7 aparatos de tipo B, la duración ha sido 15, 16, 17, 15, 16, 18 y 17 meses. Supuesta la normalidad de los datos, se pide:
- a) Estima la duración media y la desviación típica para ambos tipos de aparatos.
- b) Halla un intervalo de confianza para el cociente de varianzas con nivel de significación $\alpha = 0,1$, ¿puede admitirse que son iguales?
- c) ¿Puede afirmarse que la duración media de los aparatos tipo B es superior que la de los aparatos de tipo A?, ¿cuál es el p -valor del contraste?
27. El fabricante de un catalizador para vehículos afirma que la probabilidad de que el catalizador se averíe en 200000km de uso es de 0,1. Una compañía fabricante de vehículos quiere asegurarse de que esto es cierto antes de optar por dicho catalizador. Para ello, ensambla 25 catalizadores en otros respectivos 25 vehículos. Luego somete a cada uno de ellos a un uso durante 200000km. Al final se observa que han fallado 4 catalizadores. ¿Tiene la compañía de vehículos suficientes evidencias para rechazar los catalizadores con un nivel de significación $\alpha = 0,05$?, ¿cuál es el p -valor del contraste?
28. Una compañía de ordenadores desea evaluar la eficacia de dos tipos de discos duros instalados en sus ordenadores. Para ello utiliza como medida de calidad el tiempo medio entre fallos del sistema (en horas). La compañía ha optado por instalar 6 discos de cada clase en 12 ordenadores diferentes. Los resultados obtenidos fueron:

Disco 1	123	121	133	130	129	125
Disco 2	125	121	120	135	121	125

- a) Estima la duración media y la desviación típica para ambos tipos de aparatos.
- b) Halla un intervalo de confianza para la diferencia de medias con un nivel de significación $\alpha = 0,1$, ¿puede admitirse que son iguales?